Automatisering van basale rekenkennis en het ontstaan van rekenproblemen

Drempels in het tot stand komen van feitenkennis en procedurele kennis

Samenvatting

Het automatiseren van basale rekenfeiten is belangrijk voor de verdere ontwikkeling van het schoolse rekenen. De veronderstelling in de praktijk is dat de basissommen (t/m 20) na twee jaar rekenonderwijs zijn geautomatiseerd, maar de ervaring is dat dit voor veel leerlingen niet klopt. Vanwege het ontbreken van empirische onderzoeksgegevens is in 2006 gestart met een grootschalig longitudinaal project waarin de ontwikkeling van het technisch rekenen wordt gevolgd. Door elk half jaar de rekensnelheid en de accuratesse te toetsen is na te gaan hoe de kennis met betrekking tot verschillende rekeninhouden ('drempels') zich ontwikkelt en welke individuele verschillen zich daarbij voordoen bij zowel zwakke als sterke rekenaars. In dit artikel gaan we in op de theoretische en empirische achtergronden van het onderzoek, resulterend in een aantal onderzoeksvragen die in volgende bijdragen aan de hand van empirische resultaten zullen worden beantwoord.

Automaticity of basic facts in learning mathematics and the emergence of problems in computation

Thresholds in the development of factual and procedural knowledge

Summary

Automaticity of basic numerical facts is an important condition for learning mathematics. The assumption in school methods is that most basic facts (addition and substraction with outcomes $\leq$ 20) are acquired after two years of math education. However, the experience is that for many students this is not the case. Due to a lack of empirical data a large-scale longitudinal project is started in 2006 focussing on the development of automaticity in computation. Assessing every six months the speed and accuracy of computational skills makes it possible to study the mastery of different thresholds in the development of numerical computation. An important question is what the essential differences are between weak and strong performers in the successive school years. In this article we will look at the theoretical and empirical background of the project, resulting in a number of research questions that in future contributions will be answered on the basis of empirical results.

Adres van de auteurs:

A.J.J.M. Ruijssenaars, Orthopedagogiek, Universiteit van Groningen, Grote Rozenstraat 38, 9712TJ Groningen. (a.j.j.m.ruijssenaars@rug.nl)
W. Hofstetter, Orthopedagogiek, Universiteit van Groningen, Grote Rozenstraat 38, 9712TJ Groningen.
W. Danhof, Dokter B. Hornstrasingel 64, 9251AM, Burgum.
A.E.M.G. Minnaert, Orthopedagogiek, Universiteit van Groningen, Grote Rozenstraat 38, 9712TJ Groningen.

Automatisering van basale rekenkennis en het ontstaan van rekenproblemen
Drempels in het tot stand komen van feitenkennis en procedurele kennis

Vooraf
Deze bijdrage vormt de inleiding op en achtergrond van een aantal artikelen naar aanleiding van een longitudinaal onderzoeksproject naar de automatisering van het technisch rekenen ('kale sommen') vanaf de start van groep 3 tot in het voortgezet onderwijs. Het onderzoek is uitgevoerd in samenwerking tussen CEDIN en de Rijksuniversiteit Groningen (Orthopedagogiek) en startte in 2006 met de deelname van ruim 1000 leerlingen in Noord-Nederland in het regulier en speciaal basisonderwijs. Aanvullend zijn in samenwerking met de Universiteit Utrecht (Orthopedagogiek) en de Rijksuniversiteit Gent (Experimenteel-klinische en Gezondheidspsychologie) in 2011 nog ruim 2000 basisschoolleerlingen onderzocht met dezelfde meetinstrumenten om een vergelijking mogelijk te maken met de gegevens uit Noord-Nederland en uitspraken te kunnen doen over de representativiteit en generaliseerbaarheid van de bevindingen. In 2015 en 2016 zijn ook op scholen in Engeland data verzameld.

Inleiding

Eerder hebben we voor het leren rekenen beschreven welke onderdelen van de vier hoofdbewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) voor een groot aantal leerlingen in het basisonderwijs struikelblokken blijken te zijn (Danhof, Bandstra, Milo, Mushati-Hamadani, Minnaert, & Ruijssenaars, 2008; Danhof, Bandstra, Faber, Minnaert, & Ruijssenaars, 2012; Danhof, Bandstra, Faber, Hofstetter, Minnaert, & Ruijssenaars, 2014). Daarbij gingen we uit van het zogenoemde drempelmodel, dat vijf mijlpalen beschrijft in het leren optellen en aftrekken:

1. Automatiseren van de sommen t/m 10: optellen en aftrekken (4+3; 7-4), alsook de splitsingen t/m 10 (8 splitsen in 5 en …; 6 in 4 en …).
2. Kennis van de getallenlijn tot 100 (kunnen bepalen van het volgende en vorige tiental; met tientallen kunnen springen op de getallenlijn).
3. Automatiseren van de sommen t/m 20 (inclusief de toepassing van de splitsingen t/m 10): optellen en aftrekken t/m 20 met overschrijding van het tiental (8+7; 15-7).
4. Sommen tot 100: sommen met tientallen erbij/eraf (47+30; 77-30) en sommen met overschrijding van het tiental (28+7; 35-7).
5. Sommen tot 100: sommen met zowel tientallen erbij/eraf als met overschrijding van het tiental (36+48; 65-48).[1]

De drempels bestaan uit een mix van kennis van basisfeiten (vooral drempel 1 en 3) en procedures (vooral drempel 4 en 5), en beheersing van enkele vaardigheden op de getallenlijn (drempel 2). Tekorten in deze kennis veroorzaken achterstanden en stagnatie. De kennis en vaardigheden die gebruikt worden bij het optellen/vermenigvuldigen en aftrekken/delen bouwen op elkaar voort. Een uitval in dit leerproces is dan ook doorgaans een stapeling van tekorten.

[1] In de publicatie van Danhof e.a. (2014) is de inhoud van drempel 5 vervangen door 'eenvoudige tafels: 2,3,4,5 en moeilijke tafels: 6,7,8,9'. We komen op deze aanpassing in de slotparagraaf terug.

De drempels zijn geformuleerd op grond van een combinatie van klinische ervaring en een logische taakanalyse, zoals ook waarneembaar is in de leerstofopbouw van gangbare methodes. Deze onderscheiden een opklimmende moeilijkheidsgraad en bieden oefeningen om elke nieuwe leerinhoud stapsgewijs aan te leren. Zo gaat het optellen binnen het eerste tiental (6+3) vooraf aan de overschrijding van het tiental (8+7), en wordt aan het optellen van hele tientallen (30+20) later het overschrijden toegevoegd (48+17). Aanvankelijk gebeurt dit in geïsoleerde opgaven, maar doorgaans wordt het al snel geïntegreerd in toepassingen.

Een empirische onderbouwing van de drempels en van de veronderstelde, toenemende moeilijkheidsgraad ontbreekt echter. Een longitudinaal onderzoeksproject in het regulier en speciaal basisonderwijs, dat startte in 2006, beoogt deze onderbouwing te bieden, maar geeft bovendien de mogelijkheid om meer vragen te beantwoorden die er bestaan rondom de automatisering van basale rekenkennis en over het ontstaan van rekenproblemen.

In de volgende paragrafen gaan we in op de theoretische en empirische achtergronden van de inhouden die in de drempels aan bod komen, beginnend met het tellen en de getallenlijn, gevolgd door het automatiseren van sommen met uitkomsten t/m 20 en de procedures in sommen met uitkomsten t/m 100. Gelet op de focus op het automatiseren van basale rekenkennis bespreken we de achtergronden van het tellen, de getallenlijn en het optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 20 uitgebreid. Omdat het optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 100 in sterke mate een beroep doen op procedurele kennis, beperken we ons daarbij tot enkele hoofdlijnen, voor zover van belang voor het later te beschrijven onderzoek. We formuleren in globale termen een aantal relevante onderzoeksvragen die binnen het onderzoeksproject zijn te beantwoorden.

Tellen en de getallenlijn

Het één-voor-één kunnen tellen met synchroon aanwijzen van objecten is een mijlpaal in de cognitieve ontwikkeling. Het maakt het mogelijk om de realiteit (of een abstractie daarvan) met behulp van rekentaal te ordenen. Jonge kinderen leren spelenderwijs tellen met een zich steeds uitbreidende telrij en ontdekken dat de telprocedure op van alles van toepassing is, zoals: blokken, lepels, vingers, kinderen, stappen, sprongen, afbeeldingen, maar ook op hoe lang het duurt voordat er een hap eten komt (‘een, twee, drie … hap’), vanaf wanneer je mag starten met iets (‘drie, twee, een … start!’) of als hoeveelste je aan de beurt bent. Van meet af aan raken ze zowel vertrouwd met tellen en volgorde (de ordinale functie van getallen), als met tellen en hoeveelheid (de kardinale functie van getallen). Naarmate de kennis van de telrij en de telvaardigheid zich verder uitbreiden, ontstaat meer greep op ervaringen en blijkt de rekentaal een nieuw en efficiënt communicatiemiddel met eigen spelregels en logische uitgangspunten. Voorbeelden van spelregels zijn, dat bij het vaststellen van een hoeveelheid elk object maar één keer mag worden geteld en dat het laatstgenoemde getal de hoeveelheid aangeeft (zie voor een uitgebreider overzicht van de verschillende functies van het tellen: Van Luit, 2009). Een voorbeeld van een logisch uitgangspunt is, dat je weer op de oorspronkelijke hoeveelheid uitkomt, wanneer je een aantal plaatsen in de telrij vooruit gaat en vervolgens er evenveel achteruit gaat.

De ontwikkeling van het tellen en het belang van de verschillende fasen daarin voor rekenen en wiskunde worden in de literatuur uitgebreid beschreven (zie bijvoorbeeld: Gelman & Mack, 1983; Fuson, 1988; Frank, 1989; TAL-team, 1999; Geary, Hamson, & Hoard, 2000; Ifrah, 2000; Menne, 2001; Griffin, 2004; Van Luit, 2009).

De telrij kennen en kunnen gebruiken, vooruit en achteruit, zijn noodzakelijke voorwaarden voor het leren optellen en aftrekken, en daarmee voor het vermenigvuldigen en delen, alsook voor de bewerkingen die daarop voortbouwen. In het basisonderwijs zijn optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen de vier hoofdbewerkingen die uiteindelijk zo foutloos en vlot mogelijk moeten verlopen. Leren tellen t/m 20 maakt deel uit van het voorbereidend rekenen.

Het kennen van de telrij t/m 20 en het kunnen toepassen ervan in het één-voor-één tellen van objecten worden als beheerst verondersteld op het moment dat in het onderwijs optellen en aftrekken als formeel rekenen in sommen aan bod komen. De telrij t/m 20 kennen betekent, dat minimaal de hele getallen in de juiste volgorde kunnen worden benoemd, vooruit en achteruit. Het gaat hierbij om een vorm van *feitenkennis*: namen (of: verbale labels) in de juiste volgorde kennen, vergelijkbaar met het kennen van de reeks namen van de dagen van de week. De kennis van de telrij is toe te passen in de *procedure* voor het bepalen van hoeveelheden objecten en voor het vaststellen van veranderingen daarin. Kinderen kunnen doorgaans al een deel van de telrij opzeggen (bijvoorbeeld via liedjes), voordat ze foutloos concrete hoeveelheden kunnen bepalen en de cijfers kennen. De naam, de concrete hoeveelheid en de cijfermatige weergave zijn drie met elkaar samenhangende en naar elkaar verwijzende codes, in de literatuur bekend als het triple-code model (Dehaene, 1992, 1997).

De getal-namen en de cijfermatige weergave ervan zijn opgebouwd volgens de principes van het tientallig stelsel, met vaste afspraken omtrent positie en waarde. Bijvoorbeeld: in ons taalgebied gaan in de getal-namen de eenheden vooraf aan de tientallen (‘een-en-twintig’), maar plaatsen we bij het schrijven de tientallen vóór de eenheden (‘21’). De kennis van getalpositie en getalwaarde is een voorbeeld van *feitenkennis* die belangrijk is voor het correct uitvoeren van *procedures*. Een belangrijke ondersteuning van de samenhang tussen de verschillende codes is het model van de getallenlijn, zoals we bijvoorbeeld gebruiken in de vorm van de meetlat: een concrete reeks afstanden wordt (per centimeter) weergegeven in benoembare cijfers/cijfercombinaties. In vergelijking met andere gestructureerde ordeningen van hoeveelheden – voorbeelden zijn eier-dozen, dobbelsteenfiguren, kwadraatbeelden en MAB-materiaal (zie ook: Danhof, 1993; Feys, 1995; Schopman, 1998) – is het model van de getallenlijn een krachtig hulpmiddel bij de *procedures* van optellen en aftrekken. In een later stadium van de rekenontwikkeling kunnen de geschreven getallen op de lijn worden weggelaten, zodat deze de functie krijgt van een abstract model waarop de uit te voeren procedurele handelingen zijn voor te stellen.

Het kennen van de telrij, het kunnen toepassen ervan in het formele rekenen en de combinatie met een getallenlijn vormen een cognitief complex geheel. Feitenkennis en procedurele kennis zijn van elkaar afhankelijk en dragen gezamenlijk bij aan het leerresultaat. Een tekort in een van beide typen kennis kan uitmonden in een negatief resultaat, zonder dat meteen duidelijk is aan welke basale voorwaarde niet is voldaan. In het individuele geval kan een nadere analyse daarover uitsluitsel geven. Van kinderen met (ernstige) rekenproblemen is bijvoorbeeld bekend dat ze veelal moeite hebben met kennis van een getallenlijn en met het positiestelsel van meercijferige getallen (Shalev, 2004; Cornoldi & Lucangeli, 2004), waardoor het resultaat van een oplossingsprocedure foutief kan zijn, ook al is de procedure op zich correct doorlopen. Maar een negatief resultaat zou ook het gevolg kunnen zijn van een niet-correcte procedure alleen, of van een tekort in feiten- én procedurele kennis.

Het uitgangspunt om verschillende typen kennis te onderscheiden – naast feitenkennis en procedurele kennis speelt ook metacognitieve kennis nog een belangrijke rol (Ruijssenaars, Van Luit & Van Lieshout, 2006; Minnaert, 2005; Minnaert & Vermunt, 2006) – en dit toe te passen op zowel het leren tellen als het daaropvolgende formele rekenen, past bij een ruime opvatting over wat doorgaans wordt aangeduid als ‘getalbegrip’, namelijk: weten *wat* getallen zijn en *hoe* je ermee om kunt gaan. Zolang nieuwe rekenkennis en rekenvaardigheden worden verworven, blijft ook het getalbegrip zich ontwikkelen. Getalbegrip is niet zozeer een voorwaarde die moet zijn vervuld wanneer met het leren van de rekenvaardigheid wordt begonnen, maar moet zich wel gelijktijdig in het leerproces mee *kunnen* ontwikkelen (Ruijssenaars, 1992, p. 87).

De kennis van getallenlijn ontwikkelt zich verder gedurende het formele rekenonderwijs, door uitbreiding naar grotere getallen, naar negatieve getallen, naar fracties van hele getallen, naar abstractere modellen, et cetera. Binnen dit kader volstaan we met op te merken dat voor het automatiseren van het optellen en aftrekken met uitkomsten ≤ 20 (zie vooral drempel 1 en 3) een vlotte kennis van de telrij 0-20 (vooruit en achteruit) een voorwaarde is en een goede voorspeller van de rekenvaardigheid in groep 3 (Besseler, 2010). Eind groep 2 moeten leerlingen in ieder geval de telrij tot en met tien kennen en kunnen toepassen (TAL-team, 2000). Doorgaans kunnen ze ook vanuit getallen t/m 10 terugtellen en vanuit verschillende getallen t/m 20 verder tellen (Van Luit & Van de Rijt, 2009). In groep 3 breidt dit zich uit tot het kunnen door- en terugtellen vanaf elk willekeurig punt t/m 20 (TAL-team, 1999). In het in de inleiding beschreven drempelmodel heeft de kennis van de getallenlijn betrekking op het (declaratief) kennen van de overgangen tussen de tientallen (bijvoorbeeld: '1 stap na 59 is …'; '1 stap vóór 60 is …') en het (procedureel) kunnen springen met hele tientallen, vaardigheden die voorafgaan aan het (met overschrijding van het eerste tiental) optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 20 en t/m 100.

Na de bespreking van het tellen en de getallenlijn komt in de volgende paragraaf de inhoud van drempel 1 en 3 aan bod: het optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 20, met een accent op het automatiseren van basisfeiten. Daarna besteden we kort aandacht aan het optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 100 (drempel 4 en 5) en de belangrijkste procedures die daarbij worden gebruikt.

Optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 20

Het geautomatiseerd zijn van het optellen en aftrekken met uitkomsten ≤ 20 is basaal voor al het (schoolse) rekenen dat daarna aan bod komt. We geven enkele voorbeelden:

- Direct weten dat 8+7=15 is ook van belang bij opgaven als 48+17=…, of 800+700=…, zoals 9-7=2 dat is voor 79-27=…, of voor 1900-700=….
- Herhaald optellen van 6+6+6 is de basis voor vermenigvuldigen, herhaald aftrekken is de basis voor delen.
- Delingen en verhoudingen (zoals 4:2 en 2:4) zijn aan elkaar gerelateerd en gaan (onder andere) over in bewerkingen met breuken.
- Contextopgaven doen in de rekenkundige uitwerking een beroep op vlot beschikbare feiten- en procedurele kennis.

Het onderscheid tussen feiten- en procedurele kennis wordt binnen de cognitieve psychologie vaak gemaakt (Ashcraft, 1982; Koshmider & Ashcraft, 1991; Ruijssenaars, 1992, 2001; Ruijssenaars, Van Luit & Van Lieshout, 2006), alhoewel de zinvolheid van de indeling vanuit een meer constructivistische (realistische) benadering wordt betwijfeld als te analytisch, met te weinig oog voor de manier waarop geïntegreerde kennis tot stand komt (vgl. Baroody, 1985; Baroody & Ginsburg, 1990). Deze kritiek gaat voorbij aan de huidige inzichten met betrekking tot het ontstaan van ernstige, hardnekkige rekenproblemen. Ernstige, hardnekkige rekenproblemen – te benoemen als dyscalculie – zijn per definitie *niet* het gevolg van een incomplete of tekortschietende didactiek (Ruijssenaars, Van Luit & Van Lieshout, 2006), maar worden gekenmerkt door individu-gebonden condities die leiden tot resistente problemen met het vlot/accuraat oproepen van rekenfeiten en/of het leren en vlot/accuraat toepassen van rekenprocedures (Desoete, Ghesquière, De Smedt, Andries, Van den Broeck, & Ruijssenaars, 2010). Het ontstaan van geïntegreerde kennis is bij kinderen met ernstige leerproblemen niet vanzelfsprekend, zeker niet wanneer een beroep wordt gedaan op impliciet leren binnen een variatie aan contexten en procedures. Voor hen is een sturende didactiek meer aangewezen, gebaseerd op een expliciete taak- en procesanalyse (Swanson, Hoskyn, & Lee, 2000). Nieuwe kennisinhouden worden aan deze leerlingen bij voorkeur geïsoleerd aangeboden, daarna ingeoefend en vervolgens stapsgewijs geïntegreerd in reeds bestaande kennis en vaardigheden, waarna het geleerde is toe te passen in verschillende contexten. Het leerproces van leerlingen met hardnekkige problemen start dus bij voorkeur *niet* met een variëteit aan rijke contexten, al blijft ook voor hen het streven om het geleerde breed ('altijd en overal') toepasbaar te laten zijn.

Dat feiten- en procedurele kennis te onderscheiden zijn, betekent niet dat ze zich onafhankelijk van elkaar ontwikkelen. Onder andere Garnett (1992) beschrijft op basis van onderzoek hoe kinderen aanvankelijk via de telprocedure tot het antwoord (het rekenfeit) op een rekenopgave komen. In een tweede stadium ontwikkelen ze procedures om zulke rekenfeiten te onthouden en ze te koppelen aan wat ze al weten. Tot slot beschikken ze op basis van voldoende ervaring over feitenkennis die direct uit het lange termijngeheugen kan worden opgeroepen en vlot toegankelijk is. Rekenprocedures leiden tot feitenkennis en feitenkennis maakt weer deel uit van (complexere) procedures (Rouselle & Noël, 2007). Maar problemen in het ene type kennis hebben ook gevolgen voor het andere type.

Het belang van het geautomatiseerd zijn van sommen met uitkomsten ≤ 20 voor het (schoolse) rekenen dat daarna aan bod komt, is vanuit verschillende perspectieven te onderbouwen. In het navolgende bespreken we drie invalshoeken: de praktijk, de theorie en het empirisch onderzoek.

De praktijk

In het leren optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 20 komen veel kennisinhouden aan bod, zoals: de telrij, een-voor-een tellen en tellen met sprongen (bijvoorbeeld sprongen van 2, 5, en 10), de cijfers 0-9, getallen zonder tiental, meercijferige getallen met tiental, getal-positie, bewerkingssymbolen, optellen en aftrekken met passering van het tiental (bij optellen met inwisselen van eenheden voor een tiental, bij aftrekken met inwisselen van het tiental voor eenheden), impliciet of expliciet gebruik van splitsingen, herhaald optellen en aftrekken. In de onderwijspraktijk wordt het rekenen met uitkomsten t/m 20 opgevat als leerstof voor groep 3 en groep 4. In groep 3 staat het rekenen tot 10 centraal, terwijl het streven is dat aan het eind van groep 4 het optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 20 geautomatiseerd verloopt, als vlot uitgevoerde procedure waarbij niet veel bewuste aandacht meer nodig is en veel rekenfeiten direct uit het geheugen kunnen worden opgeroepen (zie onder andere: TAL-team, 1999, 2000; SLO, 2016). De PO Raad (2009) stelt:

- *'Leerlingen moeten aan het eind van groep 3 het optellen en aftrekken tot 10 hebben gememoriseerd. Dat betekent dat sommen als 4 + 3 = 7, 6 + 3 = 9, 9 – 4 = 5 voor alle leerlingen 'weetjes' geworden zijn' (p.9). En vervolgens: 'Medio groep 4 is het optellen en aftrekken tot twintig geautomatiseerd' (p.10).*
- *'Het is belangrijk dat kinderen, nog voordat met het optellen en aftrekken tot honderd een begin wordt gemaakt, het optellen en aftrekken tot twintig hebben geautomatiseerd. De optel- en aftrektafels tot 10 moeten rekenfeitjes zijn geworden die*

als memootjes vlot en moeiteloos kunnen worden opgeroepen. Het optellen en aftrekken tot twintig (inclusief de sprong over het tiental!) moet geautomatiseerd worden beheerst' (p.12).

- *'Eind groep 4 kunnen kinderen vlot optellen en aftrekken tot 100' (p.10).*

Zoals het voorgaande laat zien, is het geautomatiseerd zijn van optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 20 in de loop of aan het einde van groep 4 een aanname die in de praktijk gemeengoed is, althans als beleidsmatig uitgangspunt. Al is het onderscheid tussen 'geautomatiseerd', 'gememoriseerd', 'rekenfeitjes' en 'memootjes' niet duidelijk, er wordt wel vanuit gegaan dat ze voorafgaan aan het optellen en aftrekken tot 100, dat eind groep 4 'vlot' dient te verlopen. De uitspraken zijn niet direct herleidbaar tot resultaten van empirisch onderzoek, maar gelden wel als aanname bij methode-ontwikkelaars.

De theorie
Er zijn verschillende, elkaar aanvullende theoretische benaderingen van het automatiseren van basisfeiten voor optellen en aftrekken, respectievelijk: een logisch-analytische, een ontwikkelingsgerichte en een didactisch-georiënteerde benadering.

- *De logisch-analytische benadering*
  Spear-Swerling (2006) beperkt de basisfeiten voor <u>optellen</u> met twee één-cijfergetallen tot sommen met uitkomsten t/m 18. Immers, het grootste één-cijfergetal is 9 (en 9+9=18). De basisfeiten voor <u>aftrekken</u> zijn het omgekeerde van die optellingen. Daarom is 19-3=16 geen basisfeit (16+3=19 is dat ook niet, want 16 is tweecijferig). Maar 18-9=9 is wel een basisfeit (vanwege 9+9=18) en 18-8=10 weer niet (in 10+8 zit een tweecijferig getal); 16-8=8 wel (omgekeerde van 8+8), 16-6=10 niet, 15-6=9 weer wel. Op die manier zijn er voor het optellen 100 basisfeiten. De keuze voor deze invulling van het begrip 'basisfeiten' is logisch-analytisch van aard. Wanneer 1+1=2 een basisfeit is, dan is het op logische gronden te verdedigen dat 11+1=12 geen basisfeit is, aangezien de toevoeging van het tiental niets verandert aan de optelling 1+1=2. Ook 21+1=22 is geen basisfeit, zoals 501+1=502 dat evenmin is.

  De vraag is of de logisch-analytische verschillen zich ook in psychologische zin onderscheiden en in hoeverre bijvoorbeeld 16-6=10 (geen basisfeit) en 15-6=9 (wel basisfeit) een beroep doen op verschillende processen. Het zou overigens logisch te beargumenteren zijn, dat voor het optellen en aftrekken met uitkomsten ≤ 20 de optelling 10+10=20 (met als inversie 20-10=10) wél een basisfeit is, aangezien dat het eerste geval is waarin de rekenoperatie leidt tot een verandering van getalwaarden, zonder dat dit betrekking heeft op de eenheden. In andere optel- en aftrekoperaties waarin een '0' betrokken is (zoals: 6+0=6 of 6-0=6), is er geen sprake van verandering van getalwaarden. De strikte opvatting van Spear-Swerling wordt door sommige auteurs gedeeld (zie bv. Poncy, MaCallum, & Schmitt, 2010), door anderen niet. Zo gaan Gersten en Chard (2001) uit van 'meer dan 100 basisfeiten voor optellen', wat betekent dat het niet alleen kan gaan om optellingen met getallen van één cijfer.

  Het belang van de logisch-analytische benadering is, dat het kan bijdragen aan de beslissing wát in een programma, dat zich richt op het automatiseren, moet worden opgenomen. Het zegt niet hóe automatismen tot stand komen en op welke manier het instructieproces daarvoor het beste is in te richten.

- *De ontwikkelingsgerichte benadering*
  Hóe basisfeiten zich ontwikkelen krijgt wel expliciet aandacht binnen deze stroming. In de ontwikkelingsgerichte benadering maakt de kennis van basisfeiten deel uit van

wat het beste valt te benoemen als ‘getal-gevoel’ (of ook: getal-gevoeligheid; Baltussen, 1993). Getal-gevoel - een vertaling van ‘number sense’ - omvat onder andere (zie Gersten & Chard, 2001): zonder problemen kunnen schakelen tussen de wereld van reële hoeveelheden en de getallenwereld; getallen op verschillende manieren kunnen gebruiken; opvallende getallen en patronen daarin kunnen herkennen; gevoel hebben voor het gebruiken van rekentaal. Kinderen ontwikkelen getal-gevoel doorgaans spelenderwijs thuis en in interactie met andere kinderen. Op beginnend niveau kan het betekenen dat een kind weet dat *acht* meer is dan *vijf*, terwijl het op een later moment weet, dat het precies *drie* meer is, of dat het een manier kent om daar achter te komen, bijvoorbeeld door vingers te tellen. Door meer ervaring worden 5+3=8, 3+5=8, 8-5=3 en 8-3=5 rekenfeiten die zonder veel bewuste aandacht zijn in te zetten bij het oplossen van een vraag als: Hoeveel kilometer moet je nog lopen, als je er al drie hebt afgelegd en de wandeling in totaal acht kilometer lang is? Basisfeiten ontwikkelen zich door ervaring op te doen met het ordenen, het manipuleren met en benoemen van hoeveelheden en hoeveelheidsrelaties, en met (reflectieve) feedback vanuit de omgeving. Daarbij speelt het (leren) tellen een centrale rol (voor een modelmatige samenvatting, zie: Dumont, 1985, p.90; Ruijssenaars, 1992, p. 88; Van de Rijt, 1996, p. 25). Het belang van het leren tellen heeft de laatste decennia meer aandacht gekregen, na een periode waarin in de door Piaget geïnspireerde ontwikkelingspsychologie de invloed van het tellen min of meer als verwaarloosbaar werd gezien (zie: Koster, 1975, p. 61), een opvatting waarop veel kritiek is gekomen, onder andere vanuit de handelingsleerpsychologie. We komen daar nog kort op terug.

- *De didactische georiënteerde benadering*
  In meer *didactisch georiënteerde* benaderingen wordt gezocht naar hoe via instructie het aanleren en automatiseren van basale rekenfeiten en getal-gevoel het beste kan plaatsvinden. Daarvoor wordt soms een beroep gedaan op resultaten van empirisch onderzoek, maar dat is niet per definitie zo. Ook een algemene onderwijsvisie die aansluit bij de tijdgeest en een reactie is op een voorgaande periode kan een bron voor het ontwerpen van instructies zijn. Een voorbeeld is de invloed van moderne media op de stichting van Steve Jobs-scholen, waarin instructie op een andere manier wordt ingevuld dan in de gangbare werkboeken-aanpak met nauwkeurig voorgeschreven instructies. Er ligt echter (nog) geen empirisch onderzoek aan ten grondslag.

Het rekenen in het traditionele onderwijs dat tot ruim na de tweede wereldoorlog dominant was en paste bij de waarde die gehecht werd aan het overdragen van kennis, wordt ook wel gekarakteriseerd als ‘koopmansrekenen’ of mechanistisch rekenen, met veel recht-toe-recht-aan oefenen (‘sommen maken’), voorafgegaan door een korte uitleg en demonstratie door de leerkracht (‘zo doen we dat’), losstaand van vraagstukken of betekenisvolle contexten. De nadruk ligt op weetjes, regels en technieken die beheerst moeten worden, met de leerling in een ondergeschikte rol: de leerling is een leeg vat dat met informatie moet worden gevuld (Verschaffel, 1995, p. 95 e.v.). De mechanistische aanpak leidde tot verschillende reacties. We geven daarvan vier voorbeelden.

Een eerste voorbeeld – met veel aanhang in ons taalgebied (vgl. Van Achter, 1969) – is het streven om de basisprincipes van het wiskundig denken als startpunt voor het rekenonderwijs te nemen. Leerlingen worden in deze (structuralistische) visie vertrouwd gemaakt met formele logica, logische relaties en verzamelingenleer, om vandaaruit de logische principes van het optellen en aftrekken aangereikt te krijgen. De leerkracht blijft als vertaler van de abstracte wiskunde een centrale rol vervullen. Hij doet dat, bijvoorbeeld, door met logi-blokken – blokken met verschillende kleuren, vormen, groottes en diktes – verzamelingen, deelverzamelingen en deel-geheelrelaties te laten ontdekken. Het positiestelsel blijft ook niet beperkt tot het tientallig stelsel, maar er kan worden gerekend in verschillende talstelsels naast elkaar, met ruimte voor overleg en discussie. De aangeboden situaties worden daarbij niet gekozen op hun realistische, maar op hun wiskundige betekenis. De aandacht voor het technisch rekenen raakte hierbij echter op de achtergrond, wat voor critici aanleiding was om te pleiten voor een herwaardering daarvan: directe instructie, memoriseren en herhaling moeten voorafgaan aan meer complexe leerprocessen ('back to basics'). Het illustreert een hardnekkig verschil van mening tussen voorstanders van fundamenteel inzicht voorafgaand aan het leren van vaardigheden versus pleitbezorgers voor de omgekeerde weg (zie ook: Yates, 2009).

Een tweede type reactie sluit aan bij de observatie dat leerlingen met rekenproblemen in het bijzonder moeite hebben met het onthouden en oproepen van basisfeiten en daardoor in situaties van overleg en discussie uitvallen, terwijl ze op zich wel profiteren van frequente herhaling (Gersten & Chard, 2001). Ze zijn ook in staat om (logische) procedures correct uit te voeren en gaan vooruit in het leren van 'droge' basisfeiten, maar er vindt geen efficiënte geheugenopslag plaats, wat een vlotte geheugentoegang (het snel kunnen oproepen van feiten) in de weg staat. Om een efficiënte geheugenopslag en geheugentoegang te bevorderen, is 'alleen maar' oefenen niet voldoende. Een oplossing is om goede procedures aan te leren waarop altijd kan worden teruggevallen (opm. in de literatuur wordt gesproken van backup *strategieën*, waar wij liever spreken van backup *procedures* waaruit strategisch kan worden gekozen). Voorbeelden van zulke procedures zijn: splitsen, rijgen op de getallenlijn, en handig rekenen (zoals: dubbele, bijna dubbele, halveren, bij optellen het grootste getal voorop, …).

Een derde voorbeeld van reactie op het traditionele rekenonderwijs is de handelingsleerpsychologie, voortkomend uit de Russische leerpsychologie. Het automatiseren van routines (in dit geval technisch rekenen) is een laatste fase in een leerproces dat wordt gekenmerkt door een geleidelijke overgang van op inzicht berustend concreet ('materieel') handelen in een herkenbare context naar verinnerlijking (perceptief, verbaal, mentaal handelen), waarbij geleidelijk verkorting in het aantal uitvoeringsstappen optreedt en er in toenemende mate beheersing ontstaat. Uiteindelijk is het geleerde ook in andere leersituaties en in andere typen taken toepasbaar. Taal, reflectie, bewust handelen en communicatie over het leerproces spelen een belangrijke rol bij het overdragen van de betekenisvolle kennis die binnen de cultuur is opgebouwd. Leerprocessen en didactische sturing zijn nauw met elkaar verbonden, maar het leren van basisfeiten op zich wordt niet expliciet nagestreefd (zie voor een overzicht: Ruijssenaars e.a., 2006). Een onderdeel van de inzet van taal bij het rekenen is de taal van de telwoorden. Tellen is meer dan de koppeling van een telwoord of getal-naam aan een vast aantal eenheden of objecten, aangezien er verschillende 'maten' gekozen kunnen worden (tellen met kleine stappen leidt tot een ander telresultaat dan tellen met grote stappen). De handelingsleerpsychologie is een duidelijke illustratie van een ontwikkelingsgerichte visie met uitgesproken didactische implicaties, altijd startend vanuit problemen die voor de leerling betekenisvol en interessant zijn (Van Oers, 1990).

In het vierde en laatste voorbeeld, het constructivisme en het realistisch rekenen, komt de aandacht bij de leerling te liggen, als schepper van zijn eigen kennis. Leerlingen (re)construeren op hun eigen manier de realiteit, doorgaans vooral binnen sociale interacties. Veel ervaringen zijn gedeelde ervaringen die in bepaalde gevallen –

of in situaties die dit uitlokken – kunnen worden gemathematiseerd. De leerkracht biedt rijke contexten aan, voordat formele uitwerkingen aan bod komen. Leerlingen worden niet alleen gestimuleerd tot eigen inbreng, maar ook om die af te zetten tegen de inbreng van anderen. Leren is een sociale activiteit, waarbij het frequent 'droog' oefenen op de achtergrond is geraakt (vgl. Danhof, 1993).

Het empirisch onderzoek

We merkten al op dat praktijk, onderwijsbeleid en theorie niet altijd het empirisch onderzoek als uitgangspunt nemen. Zo paste het traditionele onderwijs in een samenleving waarin parate kennis belangrijk was. De handelingsleerpsychologische aanpak was gedeeltelijk een reactie op de heersende westerse (ontwikkelings-)psychologie, zoals ook het constructivisme – en het realistisch rekenen – reageerde op het mathematiseren in de structuralistische stroming en op de mechanistische ideeën over hoe kennis wordt verworven. We staan in het navolgende kort stil bij beleidsgerichte studies en bij inhoud-georiënteerd onderzoek, om af te sluiten met de behoefte aan longitudinale gegevens.

De rol van het empirisch beleidsgericht onderzoek zouden we in een aantal gevallen 'corrigerend' kunnen noemen: wanneer uit populatiestudies, cohortonderzoek of vergelijkend, vaak grootschalig onderzoek blijkt dat de gemiddelde prestaties achter blijven bij de verwachtingen, dan wordt nieuw beleid ontwikkeld. Zo constateert de PO Raad in Nederland in 2009 (p. 3): '*Uit onderzoek van de Inspectie van het Onderwijs (Basisvaardigheden rekenen-wiskunde in het basisonderwijs, augustus 2008) blijkt dat (...) 23 procent wordt aangemerkt als rekenzwak.*' En: '*Het Projectbureau Kwaliteit (PK) werkt onder verantwoordelijkheid van de PO-Raad op verschillende manieren aan verbetering van het rekenonderwijs. In rekenpilots werken scholen samen om met behulp van bewezen aanpakken hun rekenonderwijs te verbeteren. Tegelijk ontwikkelen scholen nieuwe kennis over de wijze waarop het rekenonderwijs kan worden verbeterd.*' De Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) in 2011 laat zien dat in Nederland aan het einde van het basisonderwijs minder leerlingen dezelfde opgaven beheersen als in 2004: '*Bij de onderwerpen Getallen en getalrelaties, Basisoperaties: optellen en aftrekken, Basisoperaties: vermenigvuldigen en delen en Bewerkingen: optellen en aftrekken zien we een kleine achteruitgang ten opzichte van 2004*' (Cito, 2013, p.3). Op basis van dit type beleidsgericht onderzoek dringt het ministerie van OC&W aan op maatregelen die leiden tot een toename van de rekenvaardigheid van leerlingen (zie bv. http://www.taalenrekenen.nl/). Positief geformuleerd leiden deze empirische studies tot verbeteringsmaatregelen en worden de resultaten van het beleid voortdurend geëvalueerd. Een meer relativerende opvatting is echter, dat het voortdurend om maatregelen-achteraf gaat, zonder dat vooraf aan de hand van inhoud-georiënteerd onderzoek is nagegaan wat de werkzaamheid is van in de onderwijspraktijk gehanteerde visies en van de daarop gebaseerde reken-/wiskundemethodes. In de laatste decennia is in Nederland het realistisch rekenen dominant.

Wetenschappelijk, inhoud-georiënteerd onderzoek naar het automatiseren van basisfeiten in het optellen en aftrekken laat zien dat leerlingen met leerproblemen in vergelijking tot leerlingen zonder leerproblemen minder basisfeiten vlot beheersen en dat de onderlinge afstand in prestaties in de loop van het onderwijs groter wordt, ook al zijn ze vrijwel even goed in staat om procedures correct uit te voeren. Gersten en Chard (2001) vatten op basis van de literatuur een aantal resultaten van wetenschappelijk onderzoek samen en stellen, onder andere, vast:

- Al op zevenjarige leeftijd kunnen leerlingen met leerproblemen significant minder feiten uit hun geheugen oproepen dan leerlingen zonder problemen, welke laatste groep op twaalfjarige leeftijd gemiddeld drie keer zoveel basisfeiten beschikbaar heeft.

- De zwakke groep leerlingen profiteert minder van discussie-gericht rekenonderwijs dan van een traditionele aanpak.
- Het automatiseren van basisfeiten is door oefening te stimuleren, mede door de responstijd zodanig te verkorten dat tellen als procedure niet goed mogelijk is.

De auteurs zijn zelf voorstander van een constructivistische (realistische) visie op het rekenonderwijs en bepleiten om die reden – maar zonder verwijzing naar empirisch onderzoek – meer aandacht voor het aanleren van inzichtelijke, efficiënte backup procedures. Onderzoek van Poncy, MaCallum en Schmitt (2010) laat echter zien dat een constructivistisch georiënteerde training van basisfeiten in het aftrekken niet tot betere resultaten leidt dan een controleconditie, terwijl een direct op een vloeiende beheersing gerichte training dat wel doet. De effectiviteit van het laatste type aanpak is in verschillende, gecontroleerde studies bevestigd. Frequente oefening, gericht op snelheid, werkt (vgl. McTiernan, Holloway, Healy, & Hogan, 2016). We volstaan in dit kader met op te merken dat in rekenmethodes die primair zijn gebaseerd op constructivistische uitgangspunten relatief weinig aandacht bestaat voor het frequent inoefenen van basisfeiten.

Beide aangehaalde typen onderzoek, beleidsgericht en inhoud-georiënteerd, geven geen inzicht in hoe de automatisering van basisfeiten in het rekenen zich gedurende de schoolloopbaan van leerlingen ontwikkelt, zoals ook niet duidelijk wordt wat in de loop van het leerproces de verhouding is tussen het snel en accuraat beschikken over feiten (speed) enerzijds en het procedureel-correct uitvoeren (power) van basisbewerkingen anderzijds. Daarvoor is longitudinaal onderzoek nodig waarin een representatieve groep leerlingen gedurende een lange periode wordt gevolgd.

Optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 100

Veel leerlingen met rekenproblemen hebben niet alleen minder basisfeiten tot hun beschikking of kunnen ze moeilijker uit hun lange termijngeheugen oproepen, maar ook de bewerkingen met uitkomsten t/m 100 vormen voor hen dikwijls een probleem. Ruijssenaars, Van Luit en Van Lieshout (2006) wijzen op grootschalig onderzoek in Nederland waaruit blijkt dat 10% van de leerlingen in groep 8 in reguliere basisscholen moeite heeft met opgaven met tientalpassering, maar dat het overgrote deel van de leerlingen met leerproblemen al vastloopt in opgaven als 60-15=? Optellen en aftrekken met uitkomsten t/m 100 doen naast het kunnen oproepen van feitenkennis uit het lange termijngeheugen een sterk beroep op het werkgeheugen (Logie, Gilhooly & Wynn, 1994; Fürst & Hitch, 2000): het vasthouden van tussenuitkomsten en weten welke deelstappen al zijn uitgevoerd en nog met elkaar moeten worden gecombineerd. Bij leerlingen met rekenproblemen is een beperkte werkgeheugencapaciteit een belangrijke verklarende factor (Swanson, 1994, 2011), vooral wat betreft de centrale controlefunctie van het werkgeheugen en het vasthouden en (intern) bewerken van klankinformatie.

De hoeveelheid tussenstappen in sommen met uitkomsten t/m 100 is afhankelijk van de gekozen oplossingsprocedure, deels bepaald door de rekenmethode die door leerlingen wordt gebruikt. Wat betreft het cijferend rekenen hanteren realistisch georiënteerde methodes een betrekkelijk ‘vrije’ aanpak met een minder strak voorgeschreven volgorde van deelstappen. Bij leerlingen met leerproblemen leidt een meer gestructureerde procedure tot betere resultaten.

De twee meest voorkomende procedures zijn de splitsprocedure en de rijgprocedure, in Nederland uitgebreid beschreven door Beishuizen (1992, 1993, 1997). In de splitsprocedure worden de bewerkingen met tientallen en eenheden apart uitgevoerd, waarna de afzonderlijke resultaten worden samengevoegd (bijvoorbeeld 44+25 wordt: 40+20=60; 4+5=9; 60+9=69). Het splitsen in hoeveelheden tientallen en eenheden gaat uit van het positiestelsel en de kardinale eigenschap van getallen. De rijgprocedure is gebaseerd op de ordinale functie en springt op de getallenlijn voor- en achteruit (bijvoorbeeld 44+25 wordt: 44+20=64; 64+5=69). In het laatste geval hoeven minder tussenstappen te worden onthouden en is de getallenlijn een krachtig ondersteunend model. Vooral bij het aftrekken is er bij het rijgen minder kans op fouten, bijvoorbeeld bij een opgave als 44-25. De splitsprocedure daarbij is: 40-20=20; 4-5 gaat niet, dus moet er 10 geleend worden, zodat 4+10=14 en 14-5=9; waarna 10+9=19. De rijgprocedure is: 44-20=24; 24-5=19 (eventueel via 24-4-1). Het probleem van de tussenstappen speelt minder bij het schriftelijk cijferen, wanneer in kolommen mag worden gerekend en tussenstappen kunnen worden opgeschreven, en wanneer dit volgens een vaste structuur gebeurt (zie Ruijssenaars e.a., 2006). Het moge duidelijk zijn dat procedures extra belast worden wanneer de kennis van de basisfeiten (uitkomsten van optellen en aftrekken t/m 20) niet is geautomatiseerd, ook wanneer tussenresultaten mogen worden genoteerd.

Ten aanzien van het eerder beschreven drempelmodel mogen we verwachten dat een uitval in drempel 1 en 3 (t/m 20) samengaat met problemen in drempel 4 en 5 (t/m 100). Andersom hoeft dat niet zo te zijn. Een andere verwachting is, dat methodes die de rijgprocedure (op de getallenlijn) gestructureerd aanleren tot beter hoofdrekenprestaties leiden dan methodes die leerlingen hierin meer vrijheid laten (Milo, 2003; Timmermans & Van Lieshout, 2003; Kroesbergen & Van Luit, 2002).

Relevante onderzoeksvragen

Voor een goede rekenontwikkeling is automatisering van basiskennis van groot belang. Om de automatisering genuanceerd in kaart te kunnen brengen is het drempelmodel opgesteld. Het model is in de praktijk ontstaan en vindt inmiddels ingang binnen het onderwijs. Voor een gedegen empirische onderbouwing is in 2006 een longitudinaal onderzoeksproject opgezet in het regulier en speciaal basisonderwijs. Een belangrijk kenmerk van de metingen (tweemaal per jaar) is dat er op twee manieren is getoetst: op snelheid (met snelheidslimiet: speed) en op accuratesse (zonder snelheidslimiet: power). Daarnaast zijn bijkomende gegevens verzameld (zoals: intelligentie, Cito-resultaten, op school gebruikte rekenmethode). De data zijn weliswaar verzameld met deze onderbouwing als doel, maar ze geven ook de mogelijkheid om meer vragen te beantwoorden die er bestaan rondom de automatisering van basale rekenkennis en over het ontstaan van rekenproblemen. In het voorgaande hebben we rond deze thema's een aantal achtergronden geschetst. Volgende publicaties geven antwoord op een reeks relevante onderzoeksvragen die met de data zijn te beantwoorden. We noemen daarvan hier slechts de belangrijkste en zullen meer gedetailleerde vragen in latere rapportages aan bod laten komen. De belangrijkste vragen zijn:

1. Voldoen de toetsingen van de drempels aan de gangbare eisen van betrouwbaarheid en validiteit?
2. Klopt de veronderstelde opklimming in moeilijkheidsgraad van de drempels?
3. Hoe verloopt de automatisering van basisfeiten in het rekenen vanaf groep 3 tot in de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs? Klopt het idee dat aan het eind van groep 3 de uitkomsten t/m 10 'weetjes' zijn en dat eind groep 4 het optellen en aftrekken t/m 100 vlot verloopt? En hoe verhouden de snelheid-gebonden prestaties zich tot het kunnen rekenen zonder tijdslimiet?
4. Hoe verloopt de automatisering van basisfeiten voor de verschillende prestatiegroepen (van laag presterend tot hoog presterend) in het onderwijs? Wordt de afstand in

rekenprestaties tussen zwakke rekenaars en leerlingen zonder rekenproblemen in de loop van het onderwijs steeds groter?

5. In welke mate zijn de (zwakke, gemiddelde en goede) rekenprestaties op lange termijn te voorspellen vanuit de vroege rekenontwikkeling? Is er bij leerlingen die in latere leerjaren rekenproblemen hebben al een zwakke automatisering van basisfeiten in groep 3 en 4? Is er ook een groep leerlingen die relatief goed presteren op de snelheidstoetsen in drempel 1 en 3 (uitkomsten t/m 20), maar vooral problemen hebben met de rekenprocedures in sommen met uitkomsten t/m 100 (drempel 4 en 5)?
6. Zijn er verschillen in rekenontwikkeling die samenhangen met de gebruikte rekenmethode?

In de loop van het onderzoek ontstond vanuit de praktijk de behoefte om niet alleen de automatisering van het optellen en aftrekken in kaart te brengen, maar om dit aan te vullen met de kennis van de tafels t/m 10. Het betekende dat de sterk proceduregerichte drempel 5 is vervangen door ‘eenvoudige tafels (2, 3, 4, 5)’ en ‘moeilijke tafels (6, 7, 8, 9)’. We beschikken dus over een ruim aantal data met betrekking tot de oorspronkelijke drempel 5 (sommen van het type 36+48 en 65-48), alsook over gegevens over de tafels, zowel voor de laatste groepen van het basisonderwijs als voor de eerste jaren van het voortgezet onderwijs. Vanzelfsprekend is een aantal van de hierboven beschreven vragen ook van toepassing op de kennis van de tafels en zullen we daarover rapporteren.

Tot slot

In deze bijdrage zijn we ingegaan op een aantal achtergronden van het automatiseren van basale rekenkennis en op het ontstaan van problemen daarin. Een goede, tijdige onderkenning van problemen vereist een instrumentarium dat de rekenontwikkeling en de eventuele problemen daarin systematisch beschrijft en handvatten biedt voor verdere analyse en voor een vroegtijdige aanpak. Gelijktijdig met het longitudinaal onderzoek is gewerkt aan een in de praktijk goed hanteerbare methodiek om de rekenontwikkeling per leerling en per groep in kaart te brengen, leidend tot een overzicht van ontbrekende kennis (zie: Danhof e.a., 2014). Ook de opbrengst van het longitudinale onderzoek voor diagnostiek en remediëring zal in een van de volgende publicaties uitgebreid aan bod komen.

Literatuur

Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review*, 2, 213-236.

Baltussen, M. (1992). *7 Trainingsvarianten voor rekenproblemen. Een vergelijkend onderzoek uitgevoerd bij moeilijk lerende kinderen en kinderen met leerproblemen*. ’s-Hertogenbosch: KPC.

Baroody, A. J. (1985). Mastery of basic number combinations: internalization of relationships or facts? *Journal of Research in Mathematics Education*, 16(2) 83-98.

Baroody, A.J. & Ginsburg, H.P. (1990). Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 4,* 51-64 & 195-210.

Beishuizen, M. (1992). Effecten van honderdveld en rekenstaven bij goede en zwakke rekenaars. In A.J.J.M. Ruijssenaars & J.H.M. Hamers (Red.), *Leerproblemen op school: Rekenen als probleem* (pp. 109-128). Leuven: Acco.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 294-323.
Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M.Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (Red.), *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures* (pp.127-162). Utrecht: Utrecht University/Freudenthal Institute.
Besseler, J,C.E.M. (2010). *De predictieve validiteit van de UGT-R. Een onderzoek naar de voorspellende waarde van de testscores op de Utrechtse Getalbegrip Toets – Revised met betrekking tot voorbereidende rekenprestaties.* Utrecht: Universiteit Utrecht/Orthopedagogiek (masterthesis, juni 2010).
Cito (2013). PPON Rekenen-Wiskunde einde basisonderwijs. *Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau, 22,* 1-6. [Zie ook: ppon.cito.nl]
Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (2004). Arithmetic education and learning disabilities in Italy. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 42-49.
Danhof, W. (1993). Automatiseren = leren onthouden. Aanpak van een rekenprobleem. *Tijdschrift voor Orthopedagogiek, 32,* 492-509.
Danhof, W., Bandstra, P., Milo, B., Mushati-Hamadani, E., Minnaert, A., & Ruijssenaars, W. (2008). Onderzoeksproject leerbaarheid van hoofdrekenen. Naar criteria voor differentiatie en/of planning. *Panamapost. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk. 27,* 2, 24-28.
Danhof, W., Bandstra, P., Faber, S., Minnaert, A. E. M. G., & Ruijssenaars, A. J. J. M. (2012). Leerbaarheid van hoofdrekenen, rekenachterstanden en automatiseringstekorten. *Remediaal, 12*(5-6), 10-13.
Danhof, W., Bandstra, P., Faber, S., Hofstetter, W., Minnaert, A., & Ruijssenaars, W. (2014). Rekenprofiel als basis voor analyse van rekenachterstanden en diagnostiek. *Remediaal, 14*(1), 3-7.
Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44,* 1-42.
Dehaene, S. (1997). The Number Sense. How the mind creates mathematics. London: Penguin Books.
Desoete, A., Ghesquière, P., De Smedt, B., Andries, C., Van den Broeck, W., & Ruijssenaars, W. (2010). Dyscalculie: Standpunt van onderzoekers in Vlaanderen en Nederland. *Tijdschrift van de Vlaamse Vereniging voor Logopedie encFoniatrie, 23,* 4, 4 -8.
Dumont, J.J. (1985). *Leerstoornissen 1. Theorie en model* (5e geheel herziene druk). Rotterdam: Lemniscaat
Feys, R. (1995). Optellen, aftrekken en splitsen tot 20. In: L. Verschaffel & E. De Corte (Red.), *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie.* (pp. 51-93) Brussel: STOHO / Leuven: Acco.
Frank, A.R. (1989). Counting skills: A foundation for early mathematics. *Arithmetic Teacher, 37, 1, 14-17.*
Fürst, A.F., & Hitch, G.J. (2000). Separate roles for executive and phonological components of working memory in mental arithmetic. *Memory & Cognition, 28,* 774-782.
Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer-Verlag.
Garnett, K. (1992). Developing fluency with basic number facts: Intervention for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice,* 7 (4) 210-216.
Geary, D.C., Hamson, C.O., & Hoard, M.K. (2000). Numerical and Arithmetical Cognition: A Longitudinal Study of Process and Concept Deficits in Children with Learning Disability. *Journal of Experimental Child Psychology 77*, 236–263.

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: principles before skill. *Cognition, 13,* 343-359.

Gersten, R., & Chard, D.J. (2001). *Number Sense: Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities*. [http://www.ldonline.org/article/5838]

Griffin, S. (2004). Teaching Number Sense. *Educational Leadership*, 61(5), 39-42.

Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Koshmider, J. W. & Ashcraft, M. H. (1991). The development of children's mental multiplication skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 51, 53-89.

Koster K.B. (1975). *De ontwikkeling van het getalbegrip op de kleuterschool.* Groningen: Tjeenk Willink.

Kroesbergen, E.H. & Van Luit, J.E.H (2002). Veranderingen in strategiegebruik bij het leren vermenigvuldigen: effecten van een interventiestudie bij kinderen met rekenproblemen. *Pedagogische Studiën, 79 (2),* 130-116.

Logie, R. H., Gilhooly, K. J., & Wynn, V. (1994). Counting on working memory in arithmetic problem solving. Memory and Cognition, 22, 395−410.

McTiernan, A., Holloway, J., Healy, O., & Hogan, M. (2016). A Randomized Controlled Trial of the Morningside Math Facts Curriculum on Fluency, Stability, Endurance and Application Outcomes. *Journal of Behavioral Education*, *25*, pp 49-68.

Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit: een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment*. Utrecht: CD-β Press (proefschrift).

Milo, B.F. (2003). *Math instruction for special-needs students. Effects of instructional variants in addition and subtraction up to 100*. Leiden: Leiden University.

Minnaert, A.E.M.G. (2005). Maakt het verschil? Over onderwijskundige en orthopedagogische zorg voor leerlingen in het onderwijs. In E.J. Knorth, A.E.M.G. Minnaert & A.J.J.M. Ruijssenaars (Red.), *Verschillen onderscheiden. Orthopedagogische hulpverlening en begeleiding bij problematische opvoedings- en onderwijsleersituaties* (pp. 43-62). Utrecht: Agiel.

Minnaert, A., & Vermunt, J.D. (2006). 25 jaar Onderwijspsychologie in Nederland en Vlaanderen in de periode 1980 tot 2005: trends, pendels en grensverleggers. *Pedagogische Studiën, 83,* 260-277.

Oonk, W., Keijzer, R., Den Engelsen, M., Lit, S., Lek, A., & Van Waveren Hogervorst, C. (2011). *Rekenen-wiskunde in de praktijk / Kerninzichten*. Groningen: Noordhoff Uitgevers B.V.

Poncy, B.C., MaCallum, E., & Schmitt, A.J. (2010). A comparison of behavioral and constructivist interventions for increasing math-fact fluency in a second-grade classroom. *Psychology in the Schools, 47*(9), 917-930.

PO Raad (2009). *Iedereen kan leren rekenen*. Utrecht: PO Raad/Project bureau Kwaliteit.

Rouselle, L., & Noël, M. P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition, 102,* 361-395.

Ruijssenaars, A.J.J.M. (1992). *Rekenproblemen. Theorie, diagnostiek, behandeling*. Rotterdam: Lemniscaat.

Ruijssenaars, A.J.J.M. (2001). *Leerproblemen en Leerstoornissen. Remedial teaching en behandeling. Hulpschema's voor opleiding en praktijk.* Rotterdam: Lemniscaat.

Ruijssenaars, A.J.J.M, Van Luit, J.E.H., & Van Lieshout, E.C.D.M. (2006). *Rekenproblemen en dyscalculie*. *Theorie, onderzoek, diagnostiek en behandeling*. Rotterdam: Lemniscaat.

Schopman, E.A.M. (1998). *Stimulating early numeracy. The effects of remedial intervention on the early numeracy achievement in young children with special educational needs*. Doetinchem: Graviant Educatieve Uitgaven.

Shalev, R. S. (2004). Developmental dyscalculia. *Journal of Child Neurology,19,* 765-771.

SLO (2016). *Digilijn Rekenen*. Enschede/Utrecht: SLO. Zie: http://www.digilijnrekenen.nl/digilijn2/a20.html

Spear-Swerling, L. (2006). *Developing Automatic Recall of Addition and Subtraction Facts*. [http://www.ldonline.org/spearswerling/Developing_Automatic_Recall_of_Addition_and_Subtraction_Facts]

Swanson, H.L. (1994). Short-term memory and working memory: Do both contribute to our understanding of academic achievement in children and adults with learning disabilities? *Journal of Learning Disabilities, 27*, 34-50.

Swanson, H. L. (2011).Working memory, attention and mathematical problem solving: A longitudinal study of elementary school children. *Journal of Educational Psychology, 103,* 821-837.

Swanson, H.L., Hoskyn, M. & Lee, C. (2000). *Interventions for students with learning disabilities. A meta-analysis of treatment outcomes*. New York: Guilford.

TAL-team (1999). *Jonge kinderen leren rekenen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

TAL-team (2000). *Kinderen leren rekenen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Timmermans, R.E., & Van Lieshout, E.C.D.M. (2003). Influence of instruction in mathematics for low performing students on strategy use. *European Journal of Special Needs Education, 18,* 5-16.

Van Achter, V. (1969). *De modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool*. 's-Hertogenbosch: Malmberg.

Van de Rijt, B.A.M. (1996). *Voorbereidende Rekenvaardigheid bij Kleuters. De ontwikkeling van rekenvaardigheidsschalen en een onderzoek naar de invloed van een programma*. Doetinchem: Graviant Educatieve Uitgaven.

Van Luit, J.E.H. (2009). *Ontwikkeling van tellen en getalbegrip bij kleuters*. Projectbureau Kwaliteit PO-Raad: www.rekenpilots.nl/implementatiekoffer.

Van Luit, J.E.H., & Van de Rijt, B.A.M. (2009). *Utrechtse Getalbegrip Toets – Revised (UGT-R)*. Doetinchem: Graviant Educatieve Uitgaven.

Van Oers, B. (1990). The development of mathematical thinking in school: A comparison of the action-psychological and the information processing approaches. *Journal for Educational Research, 14,* 51-66.

Verschaffel, L. (1995). Visies op reken/wiskundeonderwijs. In: L. Verschaffel & E. De Corte (Red.), *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie.* (pp. 95-129) Brussel: STOHO / Leuven: Acco.

Yates, S. (2009). *The Back to Basics: dilemma for middle school mathematics teachers*. [http://www.merga.net.au/documents/Yates_RP09.pdf]